

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»**  
**Инженерно-физический факультет высоких технологий**

Щиголев В.К.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**  
**СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И**  
**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»**

для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий  
всех форм обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» / составитель: В. К. Щиголев. - Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения, изучающих дисциплину «Интегральные уравнения и вариационное исчисление». В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к практическим занятиям и к экзамену по данной дисциплине.

*Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11 от 18 июня 2019 г.).*

## Оглавление

Литература для изучения дисциплины .....	4
Тема 1. Классификация интегральных уравнений. ....	4
Тема 2. Метод последовательных приближений.....	4
Тема 3. Теоремы Фредгольма.....	4
Тема 4. Собственные значения и собственные функции .....	5
Тема 5. Уравнение Вольтерра второго рода.....	5
Тема 6. Вариационное исчисление .....	5
Тема 7. Обобщение простейшей задачи .....	5
Тема 8. Задача с незакрепленными концами.....	6
Тема 9. Условные экстремумы .....	6
Приложение 1. Список вопросов для зачета. ....	6

## **Литература для изучения дисциплины**

1. Васильева А.Б, Тихонов А.Б. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2004, 160 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРС, 2000.
3. Попов В.А. Сборник задач по интегральным уравнениям, Казань: КГУ, 2006, 30 с.

## **Тема 1. Классификация интегральных уравнений.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Классификация интегральных уравнений.
2. Составление интегральных уравнений, соответствующих задачам Коши.
3. Решение интегральных уравнений, сводя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Метрическое пространство. Принцип сжатых отображений

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1 - 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 1-8 и №№ 49-69 задачника [3].

## **Тема 2. Метод последовательных приближений**

### **Основные вопросы темы:**

1. Метод последовательных приближений уравнений Фредгольма.
2. Нахождение резольвенты для уравнений Фредгольма.
3. Решение интегральных уравнений Фредгольма при помощи резольвенты

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1 - 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 1-8 задачника [3].

## **Тема 3. Теоремы Фредгольма.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами.
2. Теоремы Фредгольма для уравнений с непрерывными ядрами.
3. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных  $\lambda$ .

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 11 - 13 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 15-26 задачника [3].

#### **Тема 4. Собственные значения и собственные функции**

##### **Основные вопросы темы:**

1. Собственные функции и собственные значения уравнения Фредгольма 2-го рода.
2. Определение собственных функций и собственных значений.
3. Вырожденные и симметричные ядра.

##### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 7-9 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 27-40 задачника [3].

#### **Тема 5. Уравнение Вольтерра второго рода.**

##### **Основные вопросы темы:**

1. Существование и единственность решения.
2. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра.
3. Резольвента для уравнения Вольтерра.
4. Уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов.

##### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 21-23 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 41-48 и №№ 70-97 задачника [3].

#### **Тема 6. Вариационное исчисление**

##### **Основные вопросы темы:**

1. Простейшая задача вариационного исчисления.
2. Основные леммы вариационного исчисления.
3. Уравнение Эйлера.
4. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

##### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1, 2 главы 6 учебника [2].

Задачи к теме приведены в разделе «Задачи к главе 6» на стр. 324 учебника [2].

#### **Тема 7. Обобщение простейшей задачи**

##### **Основные вопросы темы:**

1. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами.
2. Функционал, зависящий от нескольких функций.
3. Функционал, зависящий от производных высших порядков.
4. Функционал, зависящий от функции от нескольких переменных.

##### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 3-5 главы 6 учебника [2].

Задачи к теме приведены в разделе «Задачи к главе 6» на стр. 326 учебника [2].

## **Тема 8. Задача с незакрепленными концами.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Общая формула вариации функционала с незакрепленными концами.
2. Задача с незакрепленными концами для функционала от одной функции.
3. Задача с незакрепленными концами для функционала от двух функций.
4. Экстремали с изломами. Задача об отражении экстремалей. Преломление экстремалей.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1-3 главы 7 учебника [2].

Задачи к теме приведены в разделе «Задачи к главе 7» на стр. 349 учебника [2]

## **Тема 9. Условные экстремумы**

### **Основные вопросы темы:**

1. Условные экстремумы. Задача Лагранжа.
2. Обобщение изопериметрической задачи.
3. Задача Больца.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1-3 главы 9 учебника [2].

Задачи к теме приведены в разделе «Задачи к главе 9» на стр. 393 учебника [2]

## **Приложение 1. Список вопросов для зачета.**

1. Классификация интегральных уравнений. Ядро интегрального уравнения.
2. Метрические пространства. Нормированное пространство. Примеры метрических пространств.
3. Принцип сжимающих отображений.
4. Метод последовательных приближений для уравнений Фредгольма 2-го рода.
5. Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода.
6. Резольвента.
7. Уравнения с вырожденными ядрами.
8. 1-ая теорема Фредгольма.
9. 2-ая теорема Фредгольма.
10. Альтернатива Фредгольма.
11. Резольвента уравнений Фредгольма при произвольных  $\lambda$ .
12. Детерминанты Фредгольма.
13. Основные леммы вариационного исчисления.
14. Вариация функционала.
15. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера
16. Функционал зависящий от нескольких функций или от производных высших порядков. Уравнение Эйлера-Пуассона.

17. Функционал зависящий от функций от нескольких переменных. Уравнение Эйлера - Остроградского.
18. Общая формула вариации функционала для задачи с незакрепленными концами.
19. Абсолютно свободный конец.
20. Экстремали с изломами. Задача об отражении экстремалей.